MAI 1 – 2. cvičení (11.10.2018)

I. Ještě opakování - příklady z 1.cvičení:

1. výroky, množiny : II./ př.1, 4, 6;
2. ještě k absolutní hodnotě: I./ př. 3 g, h) ; II/př.5 ;
3. funkce: něco z příkladů v III – definiční obory, grafy (bez užití diferenciálního počtu), vlastnosti funkce, funkce inverzní;
4. důkazy užitím matematické indukce: IV/ př.4, 6;
5. vlastnosti zobrazení: V/ př.a), b) .

II. Supremum a infimum množiny v R:

1. Zopakujte si definici suprema , infima, maxima a minima množiny v R, také větu o supremu (infimu).

2. Uveďte příklad množiny, která má supremum a nemá maximum; může mít množina maximum, ale ne supremum? Uveďte příklad množiny, která supremum nemá.

3. Najděte (v R) supremum, infimum, maximum, minimum (pokud existují) následujících množin:

a) $A_1 = \left\{\frac{1}{n}; n \in N\right\}$; $A_2 = \left\{1 - \frac{1}{n^2}; n \in N\right\}$; $A_3 = \left\{\frac{n-1}{n}; n \in N\right\}$; $A_4 = \left\{\frac{n + (-1)^n}{n}; n \in N\right\}$;

$A_5 = \left\{n^{(-1)^n}; n \in N\right\}$; $A_6 = \left\{\frac{p}{p+q}; p, q \in N\right\}$;

b) $B_1 = \left\{n^2 - m^2; m, n \in N\right\}$; $B_2 = \left\{n^2 - m^2; m, n \in N, n > m\right\}$; $B_3 = \left\{n^2 - m^2; m, n \in N, n \le m\right\}$;

c) $C_1 = \left\{2^{-n} + 3^{-n}; n \in N\right\}$; $C_2 = \left\{2^{-n} + 3^{-n}; n \in Z\right\}$;

d) $D_1 = \left\{\sin x; x \in [0, 2\pi]\right\}$; $D_1 = \left\{\sin x; x \in (0, 2\pi)\right\}$; $D_1 = \left\{\sin x; x \in (0, \pi)\right\}$; $D_1 = \left\{\sin x . \cos x; x \in R\right\}$;

e) $E = \left\{q < \sqrt{3}; q \in Q\right\}$.

4. Ukažte, že pro neprázdné množiny A, B reálných čísel platí: $(\forall a \in A \ \forall b \in B : a \le b) \Rightarrow (\sup A \le \inf B)$.

5. Nechť podmnožiny A, B množiny reálných čísel jsou neprázdné a omezené. Co lze říci o supremu a infimu množin
   a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A + B = \left\{a + b;\ a \in A \wedge b \in B\right\}$; d) $-A = \left\{-a;\ a \in A\right\}$.

III. Těleso reálných čísel (a cvičení důkazů):

1. Dokažte následující tvrzení:
   a) Je-li $x \in R, x \neq 0$, pak opačný prvek $-x$ a inverzní prvek x^{-1} jsou určené jednoznačně ;
   b) $\forall x \in R: 0 \cdot x = 0$;
   c) $\forall x, y \in R$: $(-x).(-y) = x.y$;
   d) $\forall x \in R: -(-x) = x$, $-x = (-1).x$;
   e) $\forall x, y \in R$: $(-x).y = -(x.y) = x.(-y)$.

2. Dokažte:
   a) $0 < 1$; b) $0 < x \Rightarrow 0 < x^{-1}$; c) $x \neq 0 \Rightarrow 0 < x.x$; d) $0 < x \Rightarrow -x < 0$;
   e) $x < y \Rightarrow -x > -y$; f) $x < 0 < y \Rightarrow x.y < 0$.